الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = -3$ و من أجل كلّ كلّ عدد طبيعي n ؛
$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1$.

1/ أ) أحسب u_1, u_2, u_3 .

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 3$ ؛ $u_n > 0$.

ج) استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 4$ ؛ $u_n > 3n - 4$ ، ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2/ لتكن المتتالية العددية (v_n) من أجل كلّ عدد طبيعي ؛ $v_n = u_n - 9n + 30$.

أ) برهن أنّ (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

3/ أ) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1+1} \times e^{v_2+2} \times \cdots \times e^{v_n+n}$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم 0 و كريتان حمروان تحملان الرقم 5 و كرية بيضاء تحمل الرقم α (α عدد طبيعي يختلف عن 5 و 10) ، سحب لاعب ثلاث كريات في آن واحد (الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس) .

1/ أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : اللاعب يسحب ثلاث كريات من نفس اللون .

B : اللاعب يسحب ثلاث كريات من ألوان مختلفة .

C : اللاعب يسحب كريتين من نفس اللون .

2/ اللاعب يربح مجموع الأعداد المسجلة على الكريات الثلاثة ، نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب ثلاث كريات الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب .

أ) عيّن قيم X و بيّن أنّ $P(X = \alpha) = \frac{3}{20}$.

ب) عيّن قانون إحتمال X .

ج) أحسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثمّ عيّن قيمة α حتى يربح اللاعب 20 دينارا .

التمرين الثالث: (04 نقطة)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=iz_A$ و $z_C=\overline{z_A}$.

1/ أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الجبري و الأسي .

2/ أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(E)\cdots \quad \dfrac{1+i-z}{-1+i-z}=2e^{i\pi}$.

ب) استنتج أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بالتشابه S الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω (z_Ω هو حل المعادلة (E)) يطلب تعيين نسبته و زاويته .

3/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا تماما .

4/ أ) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=z_C-k\dfrac{z_A}{z_C}$ ، لما k يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

ب) عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث ؛ $\arg\left[\left(\dfrac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2\pi k$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة : $f(x)=x+\ln|e^x-1|$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ ، فسرّ النتيجتين بيانيا .

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x-1}$.

ب) أدرس إتجاه تغير f و شكّل جدل تغيراتها .

3/ أ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=2x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$.

ج) استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') عند $+\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

د) حدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

هـ) عيّن معادلة المماس (T) لـ (C_f)عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.

4/ أ) برهن انّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.4<\alpha<0.5$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$.

ب) أثبت أنّ α يحقق : $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$ ، ثمّ أبشئ كلا من (C_f) ، (Δ) ، (Δ') .

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=|m|x$.

6/ h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $h(x)=-2|x|+\ln\left|1-e^{|x|}\right|$.

أ) تحقق أنّ : $h(x)=f(-|x|)$ ، ثمّ بيّن أنّ h دالة زوجية .

ب) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثمّ أرسمه في نفس المعلم ((C_h) منحنى الدالة h) .

Nafouz

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقطة)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}$.

1/ أ) أحسب u_1, u_2 ، ثمّ برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $u_n > 1$.

ب) بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) استنتج أنّ (u_n) متقاربة ، ثمّ أحسب نهايتها .

2/ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 1$.

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $2v_{n+1} = v_n$.

ب) استنتج أنّ (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ج) أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n ، ثمّ أحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .

3/ أحسب بدلالة n المجاميع التالية :

$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$ ، $S'_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \cdots + 2^n v_n$ ، $S''_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \cdots + \ln(v_n)$.

التمرين الثاني: (04 نقطة)

1/ α عدد مركب ، $\overline{\alpha}$ مرافقه ، أثبت أنّ $\alpha + \overline{\alpha} = 0$ معناه α تخيلي صرف .

2/ a عدد مركب يختلف عن 0 ، نرفق بكلّ عدد مركب z يختلف عن a العدد المركب $f(z)$ حيث :

$f(z) = \dfrac{az}{z-a}$.

◁ أثبت أنّ $f(z)$ تخيلي صرف معناه : $|z|^2 \times Re(a) = |a|^2 \times Re(z)$ (Re يرمز إلى الجزء الحقيقي و $|.|$ ترمز إلى الطويلة) .

3/ نضع : $a = -1 + i$.

أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث ؛ $f(z)$ تخيلي صرف .

ب) نعتبر (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(f(z) - a) = \dfrac{9\pi}{4}$.

◁ بيّن أنّ (Δ) هي نصف مستقيم باستثناء النقطة A ذات اللاحقة a ، أكتب معادلته الديكارتية .

4/ أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري ، ثمّ عيّن B نقطة تقاطع (Γ) و (Δ) .

التمرين الثالث: (04 نقطة)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة ، منها n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي ، $n \geq 2$) ، و أربع كريات حمراء تحمل الأعداد $\pi, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$ و كرتين خضراوين تحملان العددين $\dfrac{\pi}{2}$ و $\dfrac{\pi}{3}$ ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق (الكريات لانفرق بينها عند اللمس) .

1 أ) أحسب إحتمال كل من الحدثين A و B حيث ؛ A : سحب كرتين من نفس اللون ، B : سحب كرتين تحملان نفس العدد .

ب) عيّن n حتى يكون $P(A) = \dfrac{17}{55}$.

2 نفرض أنّ $n = 5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين ، نعتبر X المتغير العشوائي

الذي يربط بكل نتيجة سحب العدد $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

أ) برر أنّ قيم X هي $-\frac{1}{2},0,\frac{1}{4};1$.

ب) بيّن أنّ $P(X=0)=\frac{27}{55}$.

ج) عرّف قانون إحتمال X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

I) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني و (Γ) المنحنى الذي معادلته $y=\ln x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$.

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1+(\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$.

3/ أدرس إتجاه تغير f و شكّل جدول تغيراتها .

4/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

5/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ) .

II) نريد البحث عن المماسات للمنحنى (C_f) المارة من المبدأ O ، ليكن a عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$.

1/ برهن أنّ المماس (T_a) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a يمر من المبدأ O معناه $f(a)-af'(a)=0$.

2/ لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

◁ برهن أنّه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ لهما نفس الحلول .

3/ لتكن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(t)=t^3-t^2-t-1$.

أ) أدرس تغيرات الدالة u و شكّل جدول تغيراتها .

ب) بيّن أنّ الدالة u تنعدم مرة واحدة فقط على $\mathbb{R}$.

ج) استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى (C_f) يمر من المبدأ .

د) أثبت أنّ الحل الوحيد α للمعادلة $u(x)=0$ يحقق : $1.83<\alpha<1.84$.

هـ) استنتج أنّ معادلة المماس (T_{e^α}) المار من المبدأ هي : $y=\left(\frac{1+\alpha^2}{e^\alpha\alpha^2}\right)x$.

III) 1/ أنشئ (C_f) ، (Γ) ، و (T_{e^α}) (يعطى : $\alpha=1.8$ ، $e^\alpha=6.26$) .

2/ m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx$.

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ أ) $u_1 = 0, u_2 = 5, u_3 = \frac{34}{3}$.

ب) نضع : $P(n) : u_n > 0$.

◁ من أجل $n = 3$ لدينا $u_3 = \frac{34}{3}$ و $\frac{34}{3} > 0$ و منه $P(3)$ صحيحة .

◁ نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 3$ و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة $(n \geq 3)$.

$u_n > 0$ و $3n - 1 > 0$ و منه $\frac{2}{3}u_n + 3n - 1 > 0$ من أجل $n \geq 3$ و منه $u_{n+1} > 0$ من أجل كلّ $n \geq 3$ و منه $P(n+1)$ صحيحة $(n \geq 3)$ ، إذن و منه $u_n > 0$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 3$.

ج) لدينا $u_n - 3n + 4 = \frac{2}{3}u_n + 3$ ، لكن $u_n > 0$ و منه $u_n - 3n + 4 > 0$ و منه $u_n > 3n - 4$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 4$ ، لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n-4) = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2/ أ) $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و منه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = 27$.

ب) $v_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، $u_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30$.

3/ أ) $P_n = e^{v_0+v_1+\cdots v_n+1+2+\cdots+n}$ ، $P_n = e^{71\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n(n+1)}{2}}$.

ب) $S_n = (v_0 + 9\times 0 - 30) + (v_1 + 9\times 1 - 30) + \cdots + (v_n + 9\times n - 30)$ و منه

$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 9\times(1 + 2 + \cdots + n) - 30(n+1)$ و منه

$S_n = 71 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{9n(n+1)}{2} - 30(n+1)$.

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ $P(A) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$ ، $P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{6}{20}$ ، $P(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{20} = \frac{10}{20}$.

2/ أ) $X = \{0, 5, 10, \alpha, \alpha+5, \alpha+10\}$ ، $P(X=\alpha) = \frac{C_1^1 \times C_3^2}{20} = \frac{3}{20}$.

ب)

X	0	5	10	α	$\alpha+5$	$\alpha+10$
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

ج) $E(X) = \frac{30}{20} + \frac{30}{20} + \frac{3\alpha}{20} + \frac{6\alpha+30}{20} + \frac{\alpha+10}{20} = \frac{100+10\alpha}{20}$ ، $E(x) = 20$ و منه $\frac{100+10\alpha}{20} = 20$ و منه $\alpha = 30\mathbf{DA}$

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$.

$z_A = 1 + i$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = 1 - i$.

2/ أ) $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ و منه $1 + i - z = 2 - 2i + 2z$ و منه $3z = 3i - 1$ و منه $z = -\frac{1}{3} + i$.

ب) لدينا $z_\Omega = -\frac{1}{3} + i$ و يحقق المعادلة (E) أي $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ و منه $\frac{z_A - z_\Omega}{z_B - z_\Omega} = 2e^{i\pi}$ و منه $z_A - z_\Omega = 2e^{i\pi}(z_B - z_\Omega)$ و من A صورة B بالتشابه S الذي مركزه Ω و نسبته $k = 2$ و زاويته $\theta = \pi$.

3 $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ، $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماما و منه $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \pi k$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) > 0$ و منه $\frac{n\pi}{2} = 2\pi k$ ومنه $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}$.

4/ أ) $z - z_C = \sqrt{2}ki$ و منه $\overrightarrow{CM} = k\sqrt{2}\overrightarrow{w}$ حيث : $\overrightarrow{w} = (0,1)$ و منه (Γ_1) هي نصف المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مع $y > -1$ (نصف المستقيم $]CE)$ ، حيث $z_E = 1$.

ب) $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)^2 = \pi + 2\pi k$ ومنه $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ومنه $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه (Γ_2) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

حل التمرين الرابع : (08 نقاط)

1/ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

ب) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ ، التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f) .

2/ أ) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ أي $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$.

ب) إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	||	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty, -\ln 2[$ ، $]0, +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\ln 2, 0[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\ln 2)$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3/ أ) لدينا $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) $f(x) = x + \ln\left|e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right|$ و منه $(x) = x + \ln e^x + \ln\left|1 - \frac{1}{e^x}\right|$ لكن $e^x - 1 > 0$ على المجال $[0; +\infty[$ و منه $\left|1 - \frac{1}{e^x}\right| = \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ و منه $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

ج) لدينا $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

د) $f(x) = x$ إذن $\ln|e^x - 1| = 0$ و منه $|e^x - 1| = 1$ و منه $e^x - 1 = 1$ أو $e^x - 1 = -1$ و منه $e^x = 2$ أو $e^x = 0$ و منه $x = \ln 2$ ، إذن (C_f) قطع (Δ) في النقطة $(\ln 2, \ln 2)$.

هـ) معادلة (T) هي $y = f'(\ln 2)(x-2) + f(\ln 2)$ ، لدينا $f'(\ln 2) = 3$ و $f(\ln 2) = \ln 2$ و منه $(T) : y = 3x - 2\ln 2$.

4/ أ) f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و خاصة على المجال $[0.4, 0.5]$ و $f(0.4) \times f(0.5) < 0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.4 < \alpha < 0.5$ أما على المجال $]-\infty, 0[$ المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا لأنّ $f(x) < 0$.

إشارة $f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

ب) لدينا $f(\alpha) = 0$ و منه $\alpha + \ln|e^{\alpha} - 1| = 0$ و منه $|e^{\alpha} - 1| = e^{-\alpha}$ لكن $\alpha > 0.4$ و منه $e^{\alpha} - 1 > 0$ و منه $e^{\alpha} - 1 = e^{-\alpha}$ و منه $e^{\alpha} - 1 - \dfrac{1}{e^{\alpha}} = 0$ و منه $\dfrac{e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha}} = 0$ و منه $e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 1 = 0$.

الرسم في آخر الورقة .

5/ حلول المعادلة $f(x) = |m|x$ بيانيا هي فوصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته : $y = |m|x$ هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير m ، من البيان نجد :

إذا كان $|m| \leq 1$ أي $-1 \leq m \leq 1$ فإنّ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا موجبا .

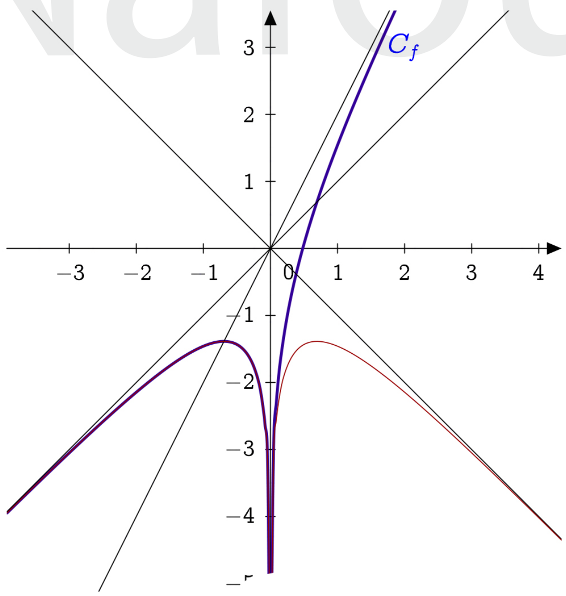
ذا كان $1 < |m| < 2$ أي $m \in]-2, -1[\cup]1, 2[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

إذا كان $|m| \geq 2$ أي $m \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا سالبا .

6/ أ) لدينا $f(-|x|) = -|x| \ln|e^{-|x|} - 1|$ و منه $f(-|x|) = -|x| \ln|e^{-|x|}| \ln|1 - e^{|x|}|$ و من $f(-|x|) = h(x)$.

، من أجل كلّ $x \neq 0$ ، $-x \neq 0$ و $h(-x) = f(-|-x|)$ أي $h(x) = f(-|x|)$ لأنّ $|-x| = |x|$ و منه $h(x) = h(-x)$ ، إذن h زوجية .

ب) لدينا من أجل $x \in]-\infty, 0[$ ، $h(x) = f(x)$ و منه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty;0[$ ، ثمّ نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لنتحصل على الجزء الباقي من (C_h) .



حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ أ) $u_1=\sqrt{5}$ ، $u_2=\sqrt{3}$.

$P(n) : u_n > 1$.

◁ من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=3$ و $3>1$ و منه $P(0)$ صحيحة .

◁ نفرض أنّ $P(n)$ و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة حيث n عدد طبيعي .

$P(n)$ صحيحة معناه $u_n>1$ و منه $u_n^2>1$ و منه $\frac{1+u_n^2}{2}>\frac{2}{2}$ و منه $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}>1$ و منه $u_{n+1}>1$ ،

إذن $P(n+1)$ صحيحة .

إذن $u_n>1$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) $u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}$ ، لدينا $1-u_n<0$ و $u_n>0$ و منه

$u_{n+1}-u_n<0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و منه (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) (u_n) محدودة من الأسفل بـ 1 و متناقصة تماما فهي متقاربة نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ ، و منه

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ و منه $\ell=\sqrt{\frac{1+\ell^2}{2}}$ مع $\ell\geq 1$ و منه $\ell^2=\frac{1+\ell^2}{2}$ و منه $\frac{(\ell+1)(\ell-1)}{2}=0$ و منه

$\ell=1$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

2/ أ) $v_n=u_n^2-1$ ، $2v_{n+1}=2u_{n+1}^2-2=u_n^2-1=v_n$.

ب) $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ و منه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=8$.

ج) $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $u_n^2=v_n+1$ و منه $u_n=\sqrt{v_n+1}=\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$ ،

$(u_n>0)$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

3/ لدينا $2^n\times v_n=8$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و منه $S'_n=8+8+\cdots+8=8(n+1)$ ،

$S_n=(v_0+1)+(v_1+1)+\cdots+(v_n+1)$ و منه $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n+n+1$ و منه

$S_n=v_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+n+1$ و منه $S_n=16\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+n+1$ ، $S''_n=\ln(v_0\times v_1\times\cdots\times v_n)$

و منه $S''_n=\ln\left[(8)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$.

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ α تخيلي صرف معناه $Re(\alpha)=0$ ، معناه $2Re(\alpha)=0$ معناه $\alpha+\overline{\alpha}=0$ لأنّ $\alpha+\overline{\alpha}=2Re(\alpha)$.

($Re(.)$ يرمز إلى الجزء الحقيقي) .

2/ $f(z)$ تخيلي صرف معناه $f(z)+\overline{f(z)}=0$ و منه $\frac{az}{z-a}+\overline{\left(\frac{az}{z-a}\right)}=0$ و منه $\frac{az}{z-a}+\frac{\overline{az}}{\overline{z}-\overline{a}}=0$

و منه $\frac{az\overline{z}-a\overline{a}z+\overline{a}z\overline{z}-a\overline{a}\overline{z}}{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}=0$ و منه $z\overline{z}(a+\overline{a})=a\overline{a}(z+\overline{z})$ لكن $z\overline{z}=|z^2|$ و $a\overline{a}=|a|^2$ و منه

$|z|^2(a+\overline{a})=|a|^2(z+\overline{z})$ لكن $z+\overline{z}=2Re(z)$ و $a\overline{a}=2Re(a)$ معناه :

$|z|^2\times Re(a)=|a|^2\times Re(z)$.

3/ $a=-1+i$.

أ) $f(z)$ تخيلي صرف معناه $|z|^2\times Re(a)=|a|^2\times Re(z)$ ، نضع $z=x+iy$ و منه $(x^2+y^2)\times(-1)=2x$ و منه $x^2+y^2+2x=0$ و منه $(x+1)^2+y^2=1$ و منه (Γ) هي الدائرة الت مركزها $(-1,0)$ و نصف قطرها $r=1$.

ب) لدينا $f(z)-a=\dfrac{a^2}{z-a}$ و منه $\arg(f(z)-a)=\arg\left(\dfrac{a^2}{z-a}\right)=2\arg(a)-\arg(z-a)$ و منه $\arg(f(z)-a)=\dfrac{9\pi}{4}$ معناه : $2\dfrac{3\pi}{4}-\arg(z-a)=\dfrac{9\pi}{4}$ و منه $\arg(z-a)=-\dfrac{3\pi}{4}$ و منه $(\overrightarrow{u},AM)=-\dfrac{3\pi}{4}$ و منه (Δ) هو نصف المستقيم $]AC)$ حيث $z_C=-2$ معادلته الديكارتية هي $y=x+2$ حيث $x<-1$.

4/ نضع $z=x+iy$ و منه $f(z)=\dfrac{az}{z-a}=\dfrac{az(\bar{z}-\bar{a})}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}$ و منه $f(z)=\dfrac{az\bar{z}-a\bar{a}z}{|z-a|^2}$ ، لدينا $z-a=(x+1)+i(y-1)$ و منه $|z-a|^2=(x+1)^2+(y-1)^2$ و $z\bar{z}=x^2+y^2$ و $a\bar{a}=2$ و منه

$$f(z)=-\frac{x^2+y^2+2x}{(x+1)^2+(y-1)^2}+i\frac{x^2+y^2-2y}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

لدينا $x^2+y^2+2x=0$ و $y=x+2$ مع $x<-1$ و منه $x^2+3x+2=0$ و $x<-1$ و منه $x=-2$ و $y=0$ ، إذن $B(-2,0)$.

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ أ) $\dfrac{14+n^2-n}{n^2+11n+30}=\dfrac{C_n^2+C_4^2+C_2^2}{C_{n+6}^2}=P(A)$ ، $\dfrac{10+n^2+n}{n^2+11n+30}=\dfrac{C_{n+1}^2+C_2^2+C_3^2}{C_{n+6}^2}=P(B)$.

ب) $P(A)=\dfrac{17}{55}$ معناه $\dfrac{17}{55}=\dfrac{14+n^2-n}{n^2+11n+30}$ و منه $19n^2-121n+130=0$ حلول هذه المعادلة في $\mathbb{N}$ هي $n=5$.

2/ نفرض أنّ $n=5$.

أ) $\alpha,\beta\in\left\{\pi,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

الجدول الموالي يبيّن القيم الممكنة لـ $\cos\alpha\cos\beta$.

$\cos\beta$ \ $\cos\alpha$	-1	$\frac{1}{2}$	0
-1	1	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
0	0	0	0

و منه القيم الممكنة لـ X هي $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},0,1\right\}$.

ب) $P(X=0)=\dfrac{C_3^2+C_3^1\times C_8^1}{C_{11}^2}$ أي $P(X=0)=\dfrac{27}{55}$.

ج)

x	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$P(X=x)$	$\frac{27}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{15}{55}$

$E(X)=\dfrac{1-24+60}{220}=\dfrac{37}{220}$.

حل التمرين الرابع : (04 نقاط)

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=-\infty$.

2/ f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x(\ln)^2}$ و منه $f'(x)=\frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$.

3/ لدينا $f'(x)>0$ من أجل كلّ x من المجال $]1;+\infty[$ و منه f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=0$ و منه (C_f) و (Γ) متقاربان عند $+\infty$.

$f(x)-\ln x=-\frac{1}{\ln x}$ و $-\frac{1}{\ln x}<0$ على المجال $]1;+\infty[$ و منه (C_f) يقع تحت (Γ) على المجال $]1;+\infty[$.

II) 1/ (T_a) معادلته $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ، (T_a) يشمل المبدأ معناه $0=f'(a)(-a)+f(a)$ و منه $f(a)-af'(a)=0$.

2/ $g(x)=0$ معناه $\ln x-\frac{1}{\ln x}+\frac{1+(lnx)^2}{(\ln x)^2}=0$ و منه $\frac{(\ln x)^2-(\ln x)-1-(\ln x)^2}{(\ln x)^2}=0$ و منه $(\ln x)^3-(\ln x)^2-(\ln x)-1=0$.

و منه المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-(\ln x)-1=0$ لهما نفس الحلول .

3/ أ) $u'(t)=3t^2-2t-1$ و إشارة $u'(t)$ كما يلي :

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه u متزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$ و$]1,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{3};1\right[$.

جدول التغيرات :

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{1}{3})$	$\searrow$	$f(1)=-1$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) الدالة u مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $0\in]-1;+\infty[$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، أما على المجال $]-\infty;1[$ المعادلة $u(t)=0$ لا تقبل حلا لأنّ $u(t)<0$ و منه u تنعدم مرة واحدة على $\mathbb{R}$.

ج) بوضع $t = \ln x$ ، تصبح المعادلة $u(t) = 0$ هي $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0$ لها حل وحيد a و منه المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد a أي $f(a) - f'(a)a = 0$ ، إذن يوجد مماس وحيد لـ (C_f) يمر من المبدأ .

د) لدينا $u(1.83) \times u(1.84) < 0$ و منه $1.83 < \alpha < 1.84$.

هـ) لدينا $\ln a = \alpha$ و منه $a = e^{\alpha}$ و منه معادلة المماس (T_a) هي $y = f'(e^{\alpha})x$ أي $y = \left(\dfrac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}\right)x$.

III) 1/ الرسم في أخر الورقة

2/ حلول المعادلة $f(x) = mx$ بيانيا هي فوصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته : $y = mx$ هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير m ، من البيان نجد :

إذا كان $m > \dfrac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}$ المعادلة $f(x) = mx$ لا تقبل حلا .

إذا كان $m \leq \dfrac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}$ المعادلة $f(x) = mx$ تقبل حلا واحدا موجبا .